



JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS

主办: 中国科学院遥感与数字地球研究所  
中国图象图形学学会  
北京应用物理与计算数学研究所

# 中国图象图形学报

2016  
07  
VOL.21

ISSN1006-8961  
CN11-3758/TB



人脸图像处理 P865

# 中国图象图形学报

刊名题字：宋健 月刊（1996年创刊）



第21卷第7期（总第243期）

2016年7月16日

中国精品科技期刊  
中国国际影响力优秀学术期刊  
中国科技核心期刊  
中文核心期刊

## 版权声明

凡向《中国图象图形学报》投稿，均视为同意在本刊网站及CNKI等全文数据库出版，所刊载论文已获得著作权人的授权。本刊所有图片均为非商业目的使用，所有内容，未经许可，不得转载或以其他方式使用。

## Copyright

All rights reserved by Journal of Image and Graphics, Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS. The content (including but not limited text, photo, etc) published in this journal is for non-commercial use.

主管单位 中国科学院  
主办单位 中国科学院遥感与数字地球研究所  
中国图象图形学学会  
北京应用物理与计算数学研究所

主 编 顾行发  
编辑出版 《中国图象图形学报》编辑出版委员会  
邮政信箱 北京9718信箱  
邮 编 100101  
电子信箱 jig@radi.ac.cn  
电 话 010-64807995  
网 址 www.cjig.cn

广告经营许可证 京朝工商广字第0361号  
总 发 行 北京报刊发行局  
订 购 全国各地邮局  
海外发行 中国国际图书贸易集团有限公司  
(邮政信箱：北京399信箱 邮编：100048)  
印刷装订 北京科信印刷有限公司

## Journal of Image and Graphics

Title inscription: Song Jian Monthly, Started in 1996

Superintended by Chinese Academy of Sciences  
Sponsored by Institute of Remote Sensing and Digital Earth, CAS  
China Society of Image and Graphics  
Institute of Applied Physics and Computational Mathematics

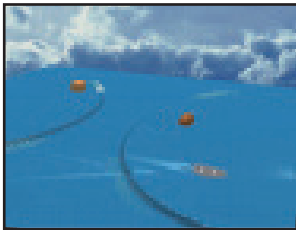
Editor-in-Chief Gu Xingfa  
Editor, Publisher Editorial and Publishing Board of Journal of  
Image and Graphics  
P.O.Box 9718, Beijing, P.R.China  
Zip code 100101  
E-mail jig@radi.ac.cn  
Telephone 010-64807995  
Website www.cjig.cn

Distributed by Beijing Bureau for Distribution of Newspapers and Journals  
Domestic All Local Post Offices in China  
Overseas China International Book Trading Corporation  
(P.O.Box 399, Beijing 100048, P.R.China)  
Printed by Beijing Kexin Printing Co., Ltd.

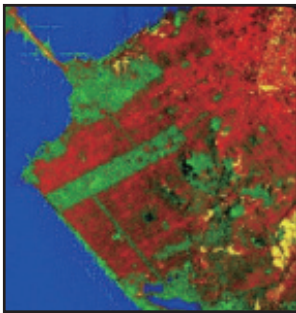
CN 11-3758/TB  
ISSN 1006-8961  
CODEN ZTTFZ  
国外发行代号 M1406  
国内邮发代号 82-831  
国内定价 60.00元



大规模柔体的连续碰撞检测算法(第901页)



大规模流体场景的真实感与实时模拟(第913页)



星载SAR影像上船舶方位向模糊去除算法(第951页)

### 图像处理和编码

#### 低存储化压缩感知

王金铭, 叶时平, 徐振宇, 蒋燕君 ..... 835

#### 3D-HEVC深度图像快速帧内编码方法

张洪彬, 伏长虹, 陈锐霖, 萧允治, 苏卫民 ..... 845

#### 加权KNN的图文数据融合分类

康丽萍, 孙显, 许光鑫 ..... 854

#### 结合肤色分割与平滑的人脸图像快速美化

邱佳梁, 戴声奎 ..... 865

### 图像分析和识别

#### 级联型P-RBM神经网络的人脸检测

叶学义, 陈雪婷, 陈华华, 顾亚风, 吕秋云 ..... 875

#### 结合全局与局部信息活动轮廓的非同质图像分割

郝智慧, 郭满才, 宋杨杨 ..... 886

### 计算机图形学

#### 带参数的多项式势函数与构造基于Metaball的过渡曲线

李军成, 宋来忠, 刘成志 ..... 893

#### 大规模柔体的连续碰撞检测算法

周清玲, 刘艳, 程天翔 ..... 901

### 虚拟现实与增强现实

#### 大规模流体场景的真实感与实时模拟

邵绪强, 杨晓丹, 李继荣, 阎蕾 ..... 913

### 医学图像处理

#### 形状约束下活动轮廓模型冠脉血管图像多尺度分割

郭笑妍, 梅雪, 李振华, 曹佳松, 周宇 ..... 923

### 遥感图像处理

#### 深度置信网络在极化SAR图像分类中的应用

邓磊, 付姗姗, 张儒侠 ..... 933

#### 高光谱图像低秩表达与噪声水平估计

唐中奇, 付光远, 赵晓林, 陈进, 张利 ..... 942

#### 星载SAR影像上船舶方位向模糊去除算法

邴磊, 邢前国, 邹娜娜, 李圳波, 吴樊 ..... 951

#### TDFA: 一种生成空间影像金字塔的方法

张云舟, 张陌, 王晋年, 张刚 ..... 959

#### 无人机侦察视频超分辨率重建方法

张岩, 李建增, 李德良, 杜玉龙 ..... 967

# CONTENTS

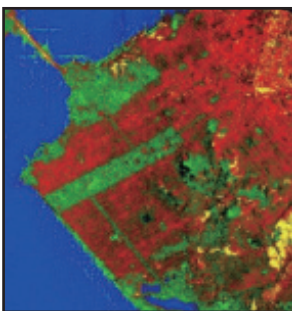
## JOURNAL OF IMAGE AND GRAPHICS



Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects (P901)



Realistic and real-time simulation of large-scale fluids (P913)



Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification (P951)

### Image Processing and Coding

|   |     |
|---|-----|
| Reducing the storage space of the measurement matrix for compressive sensing<br>Wang jinming, Ye shiping, Xu zhenyu, Jiang yanjun .....           | 835 |
| Fast intra coding for depth map in 3D-HEVC<br>Zhang Hongbin, Fu Changhong, Chan Yuilam, Siu Wanchi, Su Weimin .....                               | 845 |
| Fusion method via KNN with weight adjustment for the classification of image-text co-occurrence data<br>Kang Liping, Sun Xian, Xu Guangluan ..... | 854 |
| Fast facial beautification algorithm based on skin-color segmentation and smoothness<br>Qiu Jialiang, Dai Shengkui .....                          | 865 |

### Image Analysis and Recognition

|  |     |
|--|-----|
| Cascaded probability state-restricted Boltzmann machine for face detection<br>Ye Xueyi, Chen Xueting, Chen Huahua, Gu Yafeng, Lyu Qiuyun ..... | 875 |
| Inhomogeneous image segmentation based on active contours with global and local information<br>Hao Zihui, Guo Mancai, Song Yangyang .....      | 886 |

### Computer Graphics

|  |     |
|--|-----|
| The polynomial potential function with a parameter and transition curve based on Metaball technology<br>Li Juncheng, Song Laizhong, Liu Chengzhi ..... | 893 |
| Continuous collision detection algorithm for large-scale deformable objects<br>Zhou Qingling, Liu Yan, Cheng Tianxiang .....                           | 901 |

### Virtual Reality and Augmented Reality

|  |     |
|--|-----|
| Realistic and real-time simulation of large-scale fluids<br>Shao Xuqiang, Yang Xiaodan, Li Jirong, Yan Lei ..... | 913 |
|--|-----|

### Medical Image Processing

|  |     |
|--|-----|
| Multi-scale segmentation of coronary artery image based on active contour model with shape constraints<br>Guo Xiaoyan, Mei Xue, Li Zhenhua, Cao Jiasong, Zhou Yu ..... | 923 |
|--|-----|

### Remote Sensing Image Processing

|   |     |
|---|-----|
| Application of deep belief network in polarimetric SAR image classification<br>Deng Lei, Fu Shanshan, Zhang Ruxia .....                         | 933 |
| Low-rank representation for hyperspectral image noise level estimation<br>Tang Zhongqi, Fu Guangyuan, Zhao XiaoLin, Chen Jin, Zhang Li .....    | 942 |
| Azimuth ambiguity removal method for ship detection based on spaceborne SAR images<br>Bing Lei, Xing Qianguo, Zou Nana, Li Zhenbo, Wu Fan ..... | 951 |
| TDFA: a generation method of spatial image pyramid<br>Zhang Yunzhou, Zhang Mo, Wang Jinnian, Zhang Gang .....                                   | 959 |
| Super-resolution reconstruction for UAV video<br>Zhang Yan, Li Jianzeng, Li Deliang, Du Yulong .....  | 967 |

中图法分类号: TP391.72 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2016)07-893-08

论文引用格式: Li J C, Song L Z, Liu C Z. The polynomial potential function with a parameter and transition curve based on Metaball technology[J]. Journal of Image and Graphics, 2016, 21(7): 893-900. [李军成, 宋来忠, 刘成志. 带参数的多项式势函数与构造基于 Metaball 的过渡曲线[J]. 中国图象图形学报, 2016, 21(7): 893-900. ] [DOI:10.11834/jig.20160707]

## 带参数的多项式势函数与构造基于 Metaball 的过渡曲线

李军成<sup>1</sup>, 宋来忠<sup>2</sup>, 刘成志<sup>1</sup>

1. 湖南人文科技学院数学系, 娄底 417000; 2. 三峡大学理学院, 宜昌 443002

**摘要:** 目的 针对现有势函数在构造基于 Metaball 的过渡曲线时所存在的不足, 构造了一类带参数的多项式势函数, 并研究了该势函数在构造过渡曲线中的应用。方法 首先恰当选取一种带参数的多项式 Bézier 曲线模型, 巧妙地利用该曲线模型在端点处满足的性质构造出带参数的多项式势函数, 然后研究了所构造的势函数对过渡曲线的影响, 最后给出了基于能量优化法的最佳过渡曲线构造方法, 并通过实例验证了其有效性。结果 带参数的势函数不仅能使过渡曲线在端点处达到拟  $C^2$  连续, 而且还可利用所带的参数对过渡曲线的形状进行调整。通过能量优化法确定势函数中参数的最优取值, 可获得最为光顺的过渡曲线。结论 所提出的势函数缓解了现有势函数在构造基于 Metaball 的过渡曲线时的不足。另外, 势函数的构造方法还具有普适性, 从不同的曲线模型出发可构造出具有不同特性的势函数。

**关键词:** 多项式势函数; 形状调整; Metaball 技术; 过渡曲线; 能量优化法

### The polynomial potential function with a parameter and transition curve based on Metaball technology

Li Juncheng<sup>1</sup>, Song Laizhong<sup>2</sup>, Liu Chengzhi<sup>1</sup>

1. Department of Mathematics, Hunan University of Humanities, Science and Technology, Loudi 417000, China;  
2. College of Science, China Three Gorges University, Yichang 443002, China

**Abstract: Objective** In view of the existing potential functions' deficiency in the construction of the transition curve based on Metaball technology, a polynomial potential function with a parameter is constructed; then, the application of the potential function in constructing the transition curve is investigated. **Method** By properly selecting a class of Bézier curve with parameters, a polynomial potential function with a parameter is ingeniously constructed from the properties at the end points of the curve. Then, the influence of the potential function on the transition curve is investigated, and construction of the optimal transition curve based on the energy optimization method is presented. Examples show the feasibility of the method. **Result** The proposed potential function can not only make the transition curve achieve quasi  $C^2$  continuity at the end points but also adjust the shape of the transition curve by modifying the value of the parameter. After the optimal value of the parameter in the potential function is obtained, the smoothest transition curve would be obtained. **Conclusion** The proposed

收稿日期: 2016-01-18; 修回日期: 2016-03-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(11171181, 61472135); 湖南省教育厅资助科研项目(14B099)

第一作者简介: 李军成(1982—), 男, 副教授, 2014年于南京航空航天大学获模式识别与智能系统专业工学博士学位, 主要研究方向为计算机辅助几何设计及其应用, 已发表论文近30篇。E-mail: ljuncheng82@126.com

Supported by: National Natural Science Foundation of China(11171181, 61472135)

potential function alleviates the deficiency of the existing potential functions in constructing the transition curve based on Metaball technology. Furthermore, the construction method of potential function is universal, and the potential functions with different characteristics can be constructed from different curve models.

**Key words:** polynomial potential function; shape adjustment; Metaball technology; transition curve; energy optimization method

## 0 引言

在几何造型中,曲线曲面的形状调整是一个非常活跃的研究课题。近年来,为了满足几何造型工业中对曲线曲面形状调整的要求,国内外学者提出了许多不同的方法。其中,带参数的曲线曲面造型方法逐渐成为一个研究热点,这些方法的主要目的是在曲线模型中引入参数,并通过修改参数的取值实现对曲线形状的调整。例如,带形状参数的 Bézier 曲线<sup>[1-2]</sup>、带形状参数的 B 样条曲线<sup>[3-4]</sup>、带形状参数的三角曲线<sup>[5-6]</sup>等。

另外,在许多实际工程问题中,常常需要将两条曲线光滑地连接起来,因此过渡曲线的设计在 CAD/CAM 领域具有广泛的应用。例如,叶片泵中设计定子的过渡曲线<sup>[7]</sup>、齿根过渡曲线的设计<sup>[8]</sup>、旋叶式压缩机的气缸型线设计<sup>[9-10]</sup>等等。为了满足过渡曲线的设计要求,李凌丰等人<sup>[11]</sup>提出了一种基于势函数与 Metaball 技术的过渡曲线构造方法,该法采用 6 次多项式势函数构造的过渡曲线对被连接曲线的种类没有限制,所得的过渡曲线不仅形状自然,而且在两端点处可达到拟  $C^1$  连续。为了提高过渡曲线在两端处的拟连续性和使得过渡曲线具有形状可调性,高晖等人<sup>[12]</sup>构造了两类势函数:第 1 类为可使过渡曲线在端点处达到拟  $C^k$  连续的多项式势函数;第 2 类为可使过渡曲线在端点处达到拟  $C^1$  连续且具有形状可调性的混合三角势函数。注意到,文献[12]所构造的第 1 类势函数虽然提高了过渡曲线在端点处的拟连续性,但过渡曲线的形状仍然无法进行调整;所构造的第 2 类势函数虽然实现了过渡曲线的形状可调性,但在端点处仅能达到拟  $C^1$  连续,且由于采用了三角势函数,从而增加了计算复杂度。因此,为了构造具有更高阶拟连续性且形状可调的过渡曲线,本文巧妙地从一个带参数的多项式 Bézier 曲线模型出发,构造了一种带参数的多项式势函数,该势函数不仅

可使得过渡曲线在两端点处达到拟  $C^2$  连续,而且还可通过所带的参数实现对过渡曲线的形状调整。

## 1 基于 Metaball 的过渡曲线构造问题

文献[12]描述了基于 Metaball 过渡曲线的构造问题:给定平面上相交于点  $C$  的两条参数曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$ ,两曲线的端点分别记为  $A$  与  $B$ ,如图 1 所示,希望构造一条能将  $A$  和  $B$  两点光滑连接起来的过渡曲线  $R(t)$ 。

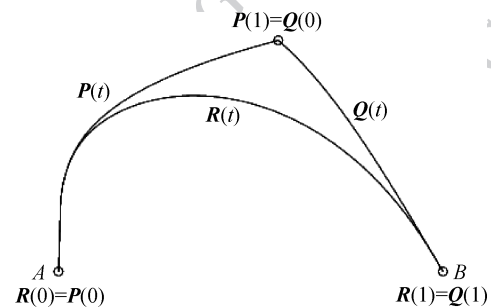


图 1 构造基于 Metaball 的过渡曲线

Fig. 1 Construction transition curve based on Metaball technology

针对上述问题,文献[11-12]给出了过渡曲线的方程为

$$R(t) = P(t)f(t) + Q(t)(1 - f(t)) \quad (1)$$

式中,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $f(t)$  为势函数。

文献[11]采用 6 次多项式势函数构造的过渡曲线可在两端处达到拟  $C^1$  连续,但过渡曲线的形状无法进行调整;虽然文献[12]构造的多项式势函数提高了过渡曲线在两端处的拟连续性,但所构造的过渡曲线不具有形状可调性,所构造的三角势函数虽然可使得过渡曲线具有形状可调性,但过渡曲线在两端处仅能达到拟  $C^1$  连续。因此本文的主要目的是构造一种多项式势函数,以此希望过渡曲线不仅在端点处满足拟  $C^2$  连续,而且还具有形状可调性。

## 2 带参数的多项式势函数

### 2.1 势函数的构造及性质

由式(1)可知,要使过渡曲线  $R(t)$  在两个端点处达到拟  $C^2$  连续,势函数  $f(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 在端点处须满足

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0, k = 1, 2 \end{cases} \quad (2)$$

本文构造势函数的基本思路是:首先恰当的选取一种带参数的曲线模型,然后利用曲线模型在端点处满足式(2)来构造满足相应性质的势函数。为了构造所需的势函数,选取如下一种带参数的多项式曲线模型。

定义1<sup>[13]</sup> 给定  $\mathbf{R}^2$  中6个控制顶点  $p_i$  ( $i=0, 1, \dots, 5$ ), 对于  $0 \leq t \leq 1, -2 \leq \alpha \leq 2, -2 \leq \beta \leq 1$ , 称曲线

$$p(t) = \sum_{i=0}^5 b_{i,5}(t) p_i \quad (3)$$

为7次  $\alpha\beta$ -Bézier 曲线,式中  $b_{i,5}(t)$  ( $i=0, 1, \dots, 5$ ) 满足

$$\begin{cases} b_{0,5}(t) = [1 - \alpha t + (\alpha - \beta)t^2](1 - t)^5 \\ b_{1,5}(t) = [5 + \alpha - (5\alpha - 2\beta)t + 5(\alpha - \beta)t^2](1 - t)^4 t \\ b_{2,5}(t) = [10 + 3\alpha - \beta - (10\alpha - 8\beta)t + 10(\alpha - \beta)t^2](1 - t)^3 t^2 \\ b_{3,5}(t) = [-10 - 3\alpha + 3\beta + (10\alpha - 12\beta)t - 10(\alpha - \beta)t^2](1 - t)^2 t^3 \\ b_{4,5}(t) = [5 + \alpha - 3\beta - (5\alpha - 8\beta)t + 5(\alpha - \beta)t^2](1 - t)t^4 \\ b_{5,5}(t) = [1 - \beta - (\alpha - 2\beta)t + (\alpha - \beta)t^2]t^5 \end{cases}$$

由式(3)定义的曲线在端点处满足

$$\begin{cases} p(0) = p_0 \\ p(1) = p_5 \\ p'(0) = (5 + \alpha)(p_1 - p_0) \\ p'(1) = (5 + \alpha)(p_5 - p_4) \\ p''(0) = 2(6\alpha - \beta + 10)p_0 - 2(9\alpha - 2\beta + 20)p_1 + 2(3\alpha - \beta + 10)p_2 \\ p''(1) = -2(3\alpha - \beta + 10)p_3 - 2(9\alpha - 2\beta + 20)p_4 + 2(6\alpha - \beta + 10)p_5 \end{cases} \quad (4)$$

显然,式(3)对应的函数可表示为

$$f(t) = \sum_{i=0}^5 b_{i,5}(t) y_i \quad (5)$$

式中,  $y_i \in \mathbf{R}, i=0, 1, \dots, 5$ 。

由式(4)可知,由式(5)定义的函数在端点处满足

$$\begin{cases} f(0) = y_0 \\ f(1) = y_5 \\ f'(0) = (5 + \alpha)(y_1 - y_0) \\ f'(1) = (5 + \alpha)(y_5 - y_4) \\ f''(0) = 2(6\alpha - \beta + 10)y_0 - 2(9\alpha - 2\beta + 20)y_1 + 2(3\alpha - \beta + 10)y_2 \\ f''(1) = -2(3\alpha - \beta + 10)y_3 - 2(9\alpha - 2\beta + 20)y_4 + 2(6\alpha - \beta + 10)y_5 \end{cases} \quad (6)$$

为了使过渡曲线在两端点处达到拟  $C^2$  连续,则由式(2)与式(6)可得

$$\begin{cases} y_0 = y_1 = y_2 = 1 \\ y_3 = -1 \\ y_4 = y_5 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入式(5)并令  $\lambda = \alpha - \beta$ , 则可定义如下一种带参数  $\lambda$  的多项式势函数。

定义2 对于  $0 \leq t \leq 1, -3 \leq \lambda \leq 4$ , 称关于变量  $t$  的函数

$$f(t) = (1 - t)^3 \times (1 + 3t + 6t^2 - 3\lambda t^3 + 6\lambda t^4) \quad (8)$$

为带参数  $\lambda$  的多项式势函数。

定理1 带参数  $\lambda$  的多项式势函数  $f(t)$  具有以下性质:

1) 端点性, 势函数  $f(t)$  在端点处满足  $f(0) = 1, f(1) = 0, f^{(k)}(0) = f^{(k)}(1) = 0 (k=1, 2)$ 。

2) 中点性, 势函数  $f(t)$  在中点处满足  $f(0.5) = 0.5$ 。

3) 对称性, 对于  $-3 \leq \lambda \leq 4$ , 恒有  $f(t) + f(1 - t) = 1$ 。

4) 单调性, 固定参数  $\lambda$  时, 势函数  $f(t)$  关于变量  $t$  单调递减。固定变量  $t$ , 当  $0 \leq t \leq 0.5$  时, 势函数  $f(t)$  关于参数  $\lambda$  单调递减; 当  $0.5 < t \leq 1$  时, 势函数  $f(t)$  关于参数  $\lambda$  单调递增。

证明: (1) 由势函数  $f(t)$  的构造过程可知, 端点性显然成立。

(2) 由式(8)可得

$$f(0.5) = 0.5^2(1 + 2 \times 0.5 - \lambda \times 0.5^2 + 2\lambda \times 0.5^3) = 0.5$$

(3) 由式(8)可得

$$f(1-t) = t^3[1 + 3(1-t) + 6(1-t)^2 - 3\lambda(1-t)^3 + 6\lambda(1-t)^4] \quad (9)$$

由式(8)(9)经简单推导可得

$$f(t) + f(1-t) \equiv 1$$

(4) 固定参数  $\lambda$ , 由式(8)经计算可得

$$f'(t) = -3t^2(1-t)^2 \times (10 + 3\lambda - 14\lambda t + 14\lambda t^2) \quad (10)$$

令

$$s(t) = 10 + 3\lambda - 14\lambda t + 14\lambda t^2 = 14\lambda(t-0.5)^2 + \frac{20-\lambda}{2} \quad (11)$$

当  $-3 \leq \lambda \leq 4$  时, 由式(11)可得

$$\begin{cases} s(0) = s(1) = 10 + 3\lambda > 0 \\ s(0.5) = \frac{20-\lambda}{2} > 0 \end{cases} \quad (12)$$

由式(12)可知, 当  $0 \leq t \leq 1$  时, 有  $s(t) \geq 0$ , 于是由式(10)可得  $f'(t) \leq 0$ , 故势函数  $f(t)$  关于变量  $t$  单调递减。

固定变量  $t$ , 由式(8)经计算可得

$$\frac{df}{d\lambda} = 3t^3(1-t)^3(2t-1) \quad (13)$$

由式(13)可知, 当  $0 \leq t \leq 0.5$  时, 有  $\frac{df}{d\lambda} \leq 0$ , 故势函数  $f(t)$  关于参数  $\lambda$  单调递减; 当  $0.5 < t \leq 1$  时, 有  $\frac{df}{d\lambda} \geq 0$ , 势函数  $f(t)$  关于参数  $\lambda$  单调递增。

由式(12)可知, 当  $\lambda$  的取值范围扩展为  $\lambda \in [-10/3, 20]$  时, 多项式势函数  $f(t)$  仍满足定理 1。因此, 多项式势函数  $f(t)$  的表达式可表示为

$$f(t) = (1-t)^3 \times (1 + 3t + 6t^2 - 3\lambda t^3 + 6\lambda t^4) \quad (14)$$

式中,  $0 \leq t \leq 1, -\frac{10}{3} \leq \lambda \leq 20$ 。

当  $\lambda = 0$  时, 式(14)可写为

$$f(t) = 1 - 10t^3 + 15t^4 - 6t^5$$

此即为文献[12]中可使过渡曲线在两端点处达到拟  $C^2$  连续的多项式势函数。图 2 为参数  $\lambda$  ( $-10/3 \leq \lambda \leq 20$ ) 取不同值的势函数图形。

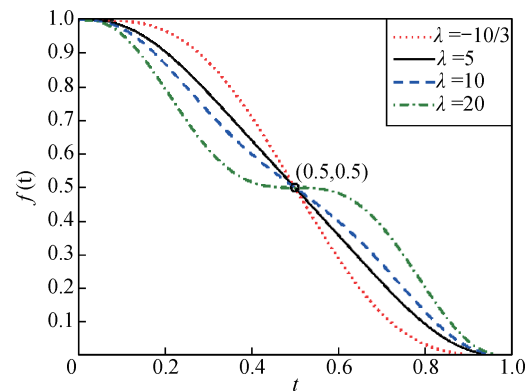


图 2 参数取不同值时的势函数

Fig. 2 The potential function with different values of the parameter

## 2.2 势函数对过渡曲线的影响

由定理 1 可知, 势函数  $f(t)$  对过渡曲线有以下影响:

1) 由势函数的端点性及式(1)可得

$$\begin{cases} R(0) = P(0), & R(1) = Q(1) \\ R'(0) = P'(0), & R'(1) = Q'(1) \\ R''(0) = P''(0), & R''(1) = Q''(1) \end{cases}$$

此即表明, 一方面, 在端点  $A$  处, 仅曲线  $P(t)$  对过渡曲线  $R(t)$  有影响, 而在端点  $B$  处, 仅曲线  $Q(t)$  对过渡曲线  $R(t)$  有影响; 另一方面, 势函数  $f(t)$  可使过渡曲线  $R(t)$  在两端点处达到拟  $C^2$  连续。

2) 由势函数的中点性及式(1)可得  $R(0.5) = \frac{P(0.5) + Q(0.5)}{2}$ , 此即表明, 在  $t = 0.5$  处, 曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$  对过渡曲线  $R(t)$  有相同的影响。

3) 由单调性及式(1)可知: 一方面, 随着  $t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 的增大, 曲线  $P(t)$  对过渡曲线  $R(t)$  的作用逐渐减小, 而曲线  $Q(t)$  对过渡曲线  $R(t)$  的作用则逐渐增大; 另一方面, 势函数  $f(t)$  的形状可通过参数  $\lambda$  ( $-10/3 \leq \lambda \leq 20$ ) 进行调整, 故当曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$  保持不变时, 过渡曲线在两端点处达到拟  $C^2$  连续的情形下可通过参数  $\lambda$  对其形状进行调整。

下面给出几种情形下, 利用势函数  $f(t)$  构造基于 Metaball 过渡曲线的实例:

1) 直线与直线间的过渡曲线, 设两直线  $P(t)$  与  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}, \quad \begin{cases} x(t) = 1 + 2t \\ y(t) = 2 - 2t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 两直线间形状不同且满足

拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 3 所示。

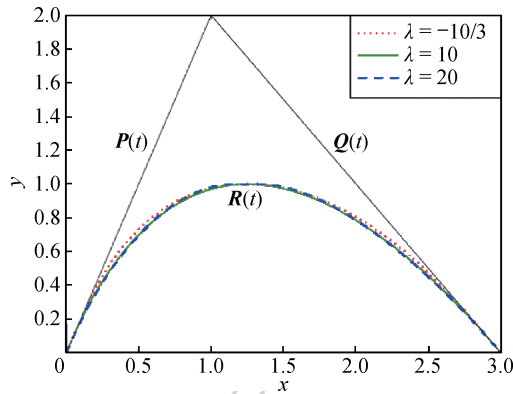


图 3 直线与直线间的过渡曲线

Fig. 3 The transition curve between straight line and straight line

2) 直线与圆弧间的过渡曲线, 设直线  $P(t)$  与圆弧  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = -(1-t) \\ y(t) = -(1-t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \sin \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \cos \frac{\pi}{2}t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 直线与圆弧间形状不同且满足拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 4 所示。

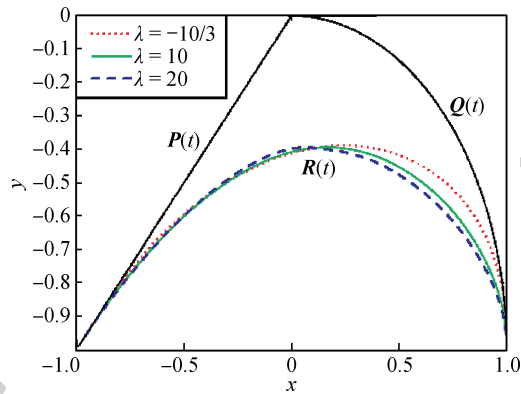


图 4 直线与圆弧间的过渡曲线

Fig. 4 The transition curve between straight line and arc

3) 圆弧与圆弧间的过渡曲线, 设两圆弧  $P(t)$  与  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = -\cos \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \sin \frac{\pi}{2}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = 1 - \cos \frac{\pi}{5}t \\ y(t) = -\sin \frac{\pi}{5}t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 圆弧与圆弧间形状不同且满足拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 5 所示。

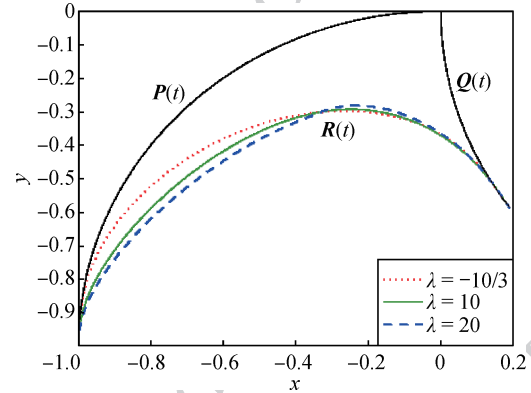


图 5 圆弧与圆弧间的过渡曲线

Fig. 5 The transition curve between arc and arc

4) 直线与曲线间的过渡曲线, 设直线  $P(t)$  与曲线  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = -(1-t) \\ y(t) = -(1-t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\pi}{2}t - \sin \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \cos \frac{\pi}{2}t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 直线与曲线间形状不同且满足拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 6 所示。

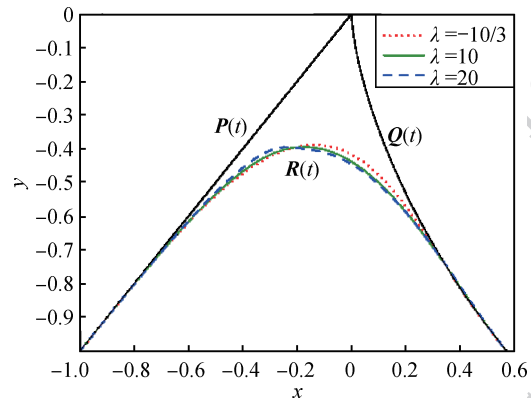


图 6 直线与曲线间的过渡曲线

Fig. 6 The transition curve between straight line and curve

5) 圆弧与曲线间的过渡曲线, 设圆弧  $P(t)$  与曲线  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = -\cos \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \sin \frac{\pi}{2}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \pi t - \sin \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \cos \frac{\pi}{2}t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 圆弧与曲线间形状不同且满足拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 7 所示。

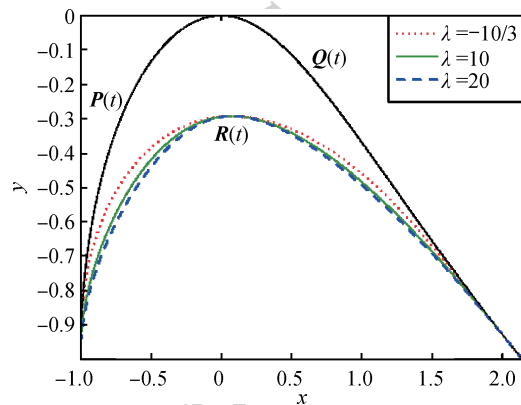


图 7 圆弧与曲线间的过渡曲线

Fig. 7 The transition curve between arc line and curve

6) 曲线与曲线间的过渡曲线, 设两曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(1-t) \\ y(t) = -2(1-t)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = \pi t - \sin \frac{\pi}{2}t \\ y(t) = -1 + \cos \frac{\pi}{2}t \end{cases}, 0 \leq t \leq 1$$

形状参数  $\lambda$  取不同值时, 曲线与曲线间形状不同且满足拟  $C^2$  连续的过渡曲线如图 8 所示。

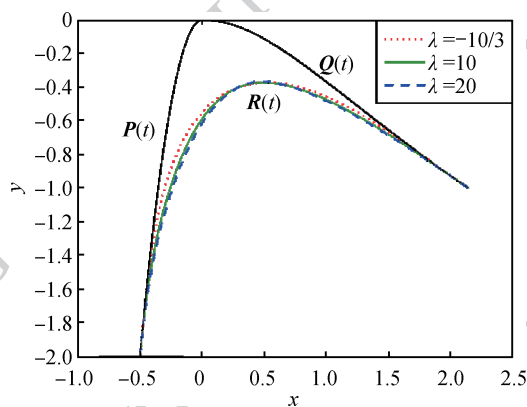


图 8 曲线与曲线间的过渡曲线

Fig. 8 The transition curve between curve and curve

上述实例表明, 利用本文提出的势函数构造基于 Metaball 的过渡曲线时, 不仅过渡曲线的形状自然, 而且还可通过势函数所带的参数  $\lambda$  获得不同形状的过渡曲线, 且均可光滑地连接两条被过渡曲线。

与文献[11-12]中给出的势函数相比, 本文构造

的函数具有以下优点:

1) 文献[11]所采用的势函数为 6 次多项式, 所构造的过渡曲线在端点处仅达到拟  $C^1$  连续, 且过渡曲线的形状无法调整。而本文构造的势函数为七次多项式, 次数仅提高了一次, 但该势函数不仅可使得过渡曲线在端点处达到拟  $C^2$  连续, 而且还可通过所带的参数对过渡曲线的形状进行调整。

2) 文献[12]所构造的  $2k+1$  次多项式势函数。虽然可提高过渡曲线在端点处满足  $C^k$  连续, 但过渡曲线的形状无法调整, 且满足不同连续性要求的势函数都需要通过求解方程组重新获得, 过程较为繁琐, 而所提出的几类三角混合势函数虽然可通过参数对过渡曲线的形状进行调整, 但过渡曲线在端点处仅达到拟  $C^1$  连续, 且由于采用了三角函数, 从而增加了模型的复杂度。而本文提出的势函数是一种多项式函数, 不仅结构简单, 而且可使得过渡曲线在端点处满足拟  $C^2$  连续的情形下通过参数对过渡曲线的形状进行调整。

### 3 最佳过渡曲线的构造

由前文可知, 当曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$  保持不变时, 过渡曲线  $R(t)$  在两端点处满足拟  $C^2$  连续的情形下可通过势函数所带的参数  $\lambda$  对其形状进行调整, 这无疑给过渡曲线的设计提供了便利。然而, 在一些应用场合中, 有时往往只需确定一条最为“光滑顺眼”的过渡曲线。因此, 最佳过渡曲线的构造问题, 即当曲线  $P(t)$  与  $Q(t)$  保持不变时, 如何确定参数  $\lambda$  的最佳取值以获得最为光滑的过渡曲线需要讨论。下面给出一种确定参数  $\lambda$  的最佳取值方法。

根据光顺准则<sup>[14]</sup>, 一条曲线的光顺程度可由该曲线的能量值来刻画, 曲线的能量值越小, 曲线则越光顺。一般地, 一条参数曲线  $r(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) 的能量值可近似的表示为

$$E = \int_0^1 (r''(t))^2 dt \quad (15)$$

于是, 由式(15)可知, 要使过渡曲线  $R(t)$  尽可能地光顺, 即需要确定参数  $\lambda$  的最佳取值以使得过渡曲线的能量值取最小值, 即可得优化模型

$$\begin{aligned} \min E(\lambda) &= \int_0^1 (R''(t))^2 dt \\ \text{s. t.} \quad &-10/3 \leq \lambda \leq 20 \end{aligned} \quad (16)$$

将式(14)代入式(1)并经推导可得

$$\mathbf{R}(t) = \lambda \mathbf{M}(t) + \mathbf{N}(t) \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(t) &= 3t^3(1-t)^3(2t-1)(\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t)) \\ \mathbf{N}(t) &= (1-t)^3(1+3t+6t^2)(\mathbf{P}(t) - \\ &\quad \mathbf{Q}(t)) + \mathbf{Q}(t) \end{aligned}$$

将式(17)代入式(16), 则过渡曲线  $\mathbf{R}(t)$  的能量优化模型可表示为

$$\begin{aligned} \min E(\lambda) &= C_1 \lambda^2 + 2C_2 \lambda + C_3 \\ \text{s. t.} \quad &-10/3 \leq \lambda \leq 20 \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^1 (\mathbf{M}''(t))^2 dt \\ C_2 &= \int_0^1 (\mathbf{M}''(t) \cdot \mathbf{N}''(t)) dt \\ C_3 &= \int_0^1 (\mathbf{N}''(t))^2 dt \end{aligned}$$

为了使得式(18)中的能量函数取最小值, 则必有

$$\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = 2C_1 \lambda + 2C_2 = 0 \quad (19)$$

1) 当  $C_1 \neq 0$  时, 方程式(19)有唯一解  $\lambda = -\frac{C_2}{C_1}$ 。于是, 模型式(18)的最优解有以下两种情形:

(1) 当  $-\frac{C_2}{C_1} < -\frac{10}{3}$  或  $-\frac{C_2}{C_1} > 20$  时, 若  $E(-10/3) \leq E(20)$ , 则模型(18)的最优解为  $\lambda = -10/3$ ;

若  $E(-10/3) \geq E(20)$ , 则模型(18)的最优解为  $\lambda = 20$ 。

(2) 当  $-10/3 \leq -\frac{C_2}{C_1} \leq 20$  时, 若  $E(-10/3) = \min\{E(-10/3), E(20), E(-\frac{C_2}{C_1})\}$ , 则模型式(18)的最优解为  $\lambda = -10/3$ ;

若  $E(20) = \min\{E(-10/3), E(20), E(-\frac{C_2}{C_1})\}$ , 则模型式(18)的最优解为  $\lambda = 20$ ;

若  $E(-\frac{C_2}{C_1}) = \min\{E(-10/3), E(20), E(-\frac{C_2}{C_1})\}$ , 则模型式(18)的最优解为  $\lambda = -\frac{C_2}{C_1}$ 。

2) 当  $C_1 = 0$  时, 由模型式(18)可知, 若  $C_2 > 0$ , 则模型式(18)的最优解为  $\lambda = -10/3$ ; 若  $C_2 \leq 0$ , 则模型式(18)的最优解为  $\lambda = 20$ 。

获得势函数中参数  $\lambda$  的最优取值后, 即可由式(1)获得最佳过渡曲线。例如, 设二次 Bézier 曲线  $\mathbf{P}(t)$  与三次 Bézier 曲线  $\mathbf{Q}(t)$  的方程分别为

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t) = (1-t)^2 \mathbf{p}_0 + 2t(1-t) \mathbf{p}_1 + t^2 \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{Q}(t) = (1-t)^3 \mathbf{q}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbf{q}_1 + \\ \quad 3t^2(1-t) \mathbf{q}_2 + t^3 \mathbf{q}_3 \end{cases}$$

式中,  $0 \leq t \leq 1$ ,  $\mathbf{p}_i (i=0, 1, 2)$  与  $\mathbf{q}_j (j=0, 1, 2, 3)$  分别为两条 Bézier 曲线的控制顶点, 且有  $\mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_0$ 。通过求解模型式(18)可得势函数所带参数  $\lambda$  的最优取值为  $\lambda = 4.6696$ , 由式(1)获得的拟  $C^2$  连续最佳过渡曲线如图9所示。

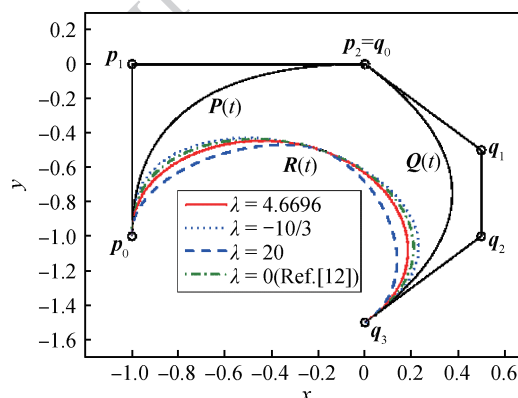


图9 最佳过渡曲线

Fig. 9 The optimal transition curve

在图9所示的过渡曲线中, 实线为参数取  $\lambda = 4.6696$  时的拟  $C^2$  连续最佳过渡曲线, 短虚线与长虚线分别为参数取  $\lambda = -10/3$  与  $\lambda = 20$  时的拟  $C^2$  连续过渡曲线, 点划线则为参数取  $\lambda = 0$  时(即文献[12]中的势函数)的拟  $C^2$  连续过渡曲线。参数  $\lambda (-10/3 \leq \lambda \leq 20)$  取不同值时过渡曲线的能量值曲线如图10所示。

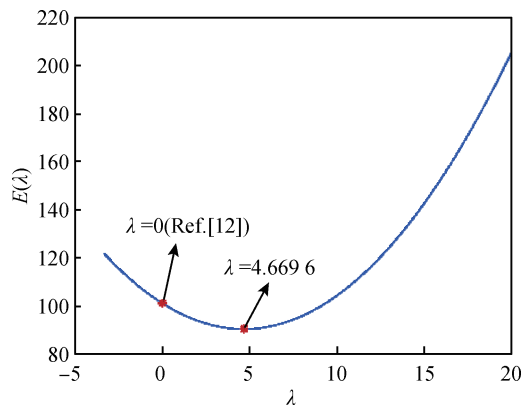


图10 过渡曲线的能量值曲线

Fig. 10 The energy curve of transition curves

由图 10 可知,利用本文方法构造的拟  $C^2$  连续最佳过渡曲线(即参数取为  $\lambda = 4.6696$ )具有最小能量值,故为最为光滑的过渡曲线。

## 4 结论

本文首先巧妙地从一个带参数的 Bézier 曲线模型出发,构造了一类带参数的多项式势函数,并研究了该势函数在构造基于 Metaball 的过渡曲线中的应用。利用本文所提出的势函数构造过渡曲线时,不仅可使得过渡曲线在端点处达到拟  $C^2$  连续,而且还可通过势函数所带的参数对过渡曲线的形状进行调整。为了满足特定应用场合的需求,本文还给出了一种最佳过渡曲线的设计方法,通过确定势函数中形状参数的最佳取值,可获得最为理想的过渡曲线。由于本文所提出的势函数构造方法具有普适性,从不同的曲线模型出发可构造出具有不同特性的势函数,因此构造能使得过渡曲线在端点处达到更高阶拟连续性且同时具有形状可调性的势函数,将是进一步研究的主要问题。

## 参考文献 (References)

- [ 1 ] Liu Z, Chen X Y, Xie J, et al. A class of adjustable quasi Bézier curve [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2009, 14(11): 2362-2368. [刘植, 陈晓彦, 谢进, 等. 一类形状可调的拟 Bézier 曲线[J]. *中国图象图形学报*, 2009, 14(11): 2362-2368. ] [DOI: 10.11834/jig.20091127]
- [ 2 ] Bashir U, Abbsa M, Ali J M. The  $G^2$  and  $C^2$  rational quadratic trigonometric Bézier curve with two shape parameters with applications [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(20): 10183-10197. [DOI: 10.1016/j.amc.2013.03.110]
- [ 3 ] Liang X K. Extension of the cubic uniform B-spline curve based on the linear combination of curves [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2011, 16(1): 118-123. [梁锡坤. 基于曲线线性组合的 3 次均匀 B 样条曲线的拓展[J]. *中国图象图形学报*, 2011, 16(1): 118-123. ] [DOI: 10.11834/jig.20110110]
- [ 4 ] Cao J, Wang G Z. Non-uniform B-spline curves with multiple shape parameters [J]. *Journal of Zhejiang University-Science C: Computers & Electronics*, 2011, 12(10): 800-808. [DOI: 10.1631/jzus.C1000381]
- [ 5 ] Han X L, Zhu Y P. Curve construction based on five trigonometric blending functions [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2012, 52(4): 953-979. [DOI: 10.1007/s10543-012-0386-0]
- [ 6 ] Yan L L, Han X L. Higher-order continuous shape adjustable trigonometric polynomial curve and surface [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2015, 20(3): 427-436. [严兰兰, 韩旭里. 高阶连续的形状可调三角多项式曲线曲面[J]. *中国图象图形学报*, 2015, 20(3): 427-436. ] [DOI: 10.11834/jig.20150314]
- [ 7 ] Ye Z F, Sun J G. An optimization design approach of stator contour curves for double-acting vane pump [J]. *Journal of Aerospace Power*, 1996, 11(4): 381-384. [叶志锋, 孙健国. 用最优控制理论设计双作用叶片泵定子曲线[J]. *航空动力学报*, 1996, 11(4): 381-384. ] [DOI: 10.13224/j.cnki.jasp.1996.04.012]
- [ 8 ] Wang J L, Bi H C, Liu K F. Tooth root fillet curve of gear by hobbing [J]. *Journal of Mechanical Transmission*, 2013, 37(1): 82-86. [王健力, 毕合春, 刘奎丰. 滚齿加工的齿轮齿根过渡曲线[J]. *机械传动*, 2013, 37(1): 82-86. ]
- [ 9 ] Guo B, Zhao Y Y, Li L S, et al. Research on cylinder profile of rotary vane compressor [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2003, 37(3): 256-259. [郭蓓, 赵远扬, 李连生, 等. 旋叶式压缩机的气缸型线研究[J]. *西安交通大学学报*, 2003, 37(3): 256-259. ] [DOI: 10.3321/j.issn:0253-987X.2003.03.010]
- [ 10 ] Song L Q, Zhao X K, Li Z C, et al. Study and application of the designing theory of the vane profile for any rotary vane compressor [J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, 47(15): 143-148. [宋立权, 赵学科, 李智成, 等. 任意缸体旋叶式压缩机的叶片型线设计理论研究及应用[J]. *机械工程学报*, 2011, 47(15): 143-148. ] [DOI: 10.3901/JME.2011.15.143]
- [ 11 ] Li L F, Tan J R, Zhao H X. Construction method of transition curve based on Metaball technique [J]. *China Mechanical Engineering*, 2005, 16(6): 483-486. [李凌丰, 谭建荣, 赵海霞. 基于 Metaball 的过渡曲线[J]. *中国机械工程*, 2005, 16(6): 483-486. ] [DOI: 10.3321/j.issn:1004-132X.2005.06.004]
- [ 12 ] Gao H, Shou H H. Construction of potential function and transition curve based on Metaball technique [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2015, 27(5): 900-906. [高晖, 寿华好. 势函数的构造及基于 Metaball 的过渡曲线[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2015, 27(5): 900-906. ] [DOI: 10.3969/j.issn.1003-9775.2015.05.016]
- [ 13 ] Yan L L, Liang J F, Huang T. Bézier curves with shape parameters [J]. *Journal of Hefei University of Technology*, 2009, 32(11): 1783-1788. [严兰兰, 梁炯丰, 黄涛. 带形状参数的 Bézier 曲线[J]. *合肥工业大学学报: 自然科学版*, 2009, 32(11): 1783-1788. ] [DOI: 10.3969/j.issn.1003-5060.2009.11.039]
- [ 14 ] Poliakoff J F. An improved algorithm for automatic fairing of non-uniform parametric cubic splines [J]. *Computer-Aided Design*, 1996, 28(1): 59-66. [DOI: 10.1016/0010-4485(95)00048-8]